Wykład 5

Praca i energia

Dr hab. inż. Jarosław Kanak
Instytut Elektroniki, paw. C-1, pok.321
kanak@agh.edu.pl
http://layer.uci.agh.edu.pl/~kanak

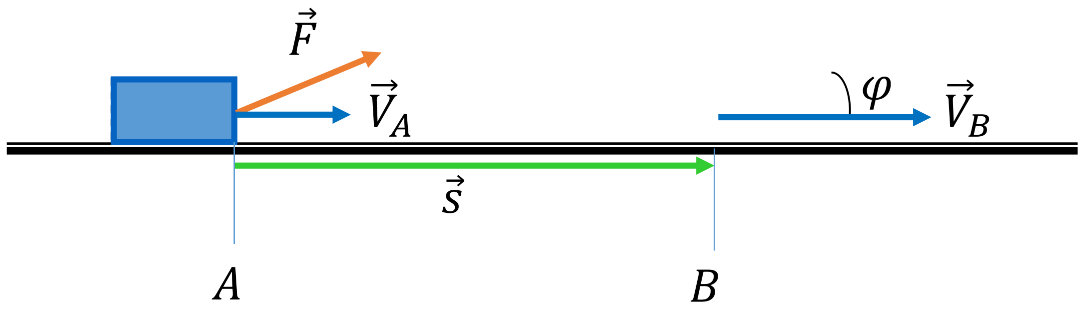
Energia a praca

- **Energia** jest to wielkość skalarna, charakteryzująca stan, w jakim znajduje się jedno lub wiele ciał. Np. energia kinetyczna jest związana ze stanem ruchu ciała.

- **Praca** jest to energia przekazana ciału lub od niego odebrana w wyniku działania na ciało siłą. Gdy energia jest przekazana ciału, praca jest dodatnia, a gdy energia jest ciału odebrana, praca jest ujemna. Praca jest równa zmianie energii.

- Jednostką energii i pracy w układzie SI jest 1J.

Praca siły stałej



Wektor przesunięcia: $\vec{s} = \overrightarrow{AB}$

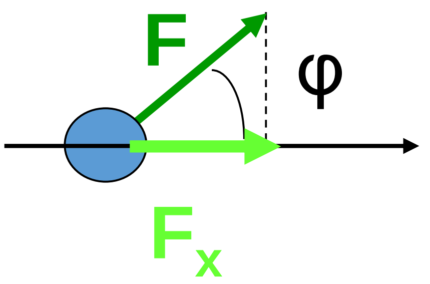
$$W = \overrightarrow{F} \circ \overrightarrow{s} = F \cdot s \cos\varphi \cdot$$

Wskutek wykonanej nad ciałem pracy wzrasta jego prędkość od V_{A} do V_{B} czyli rośnie energia kinetyczna

Praca siły stałej

Pracę wykonuje składowa x-owa siły F

$$W_{AB} = F_x \cdot s = m \cdot a_x \cdot s$$



$$\left.\begin{aligned} a_x &= \frac{v_B - v_A}{t} \\ s &= v_A \cdot t + \frac{a_x t^2}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \qquad s = \frac{v_B + v_A}{2} t$$

zatem

$$W_{AB} = m \frac{v_B - v_A}{t} \cdot \frac{v_B + v_A}{2} t$$

$$W_{AB} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = E_{kB} - E_{kA}$$

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2} m v^2}$$

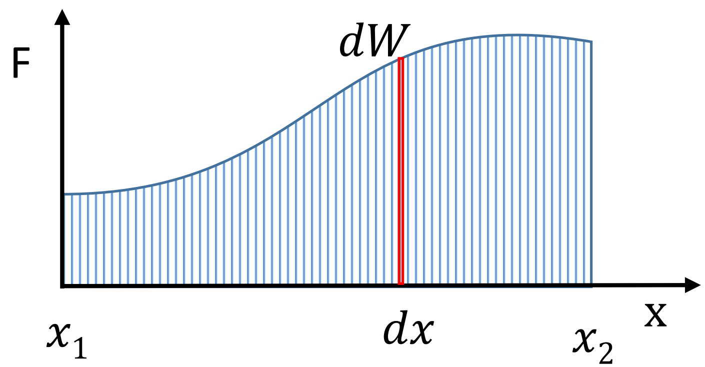
ale $\quad p = m \cdot v$

$$\boxed{E_k = \frac{p^2}{2m}}$$

Praca wykonana przez siłę nad cząstką swobodną jest równa zmianie energii kinetycznej cząstki

Praca siły niejednostajnie zmiennej

Załóżmy, że siła F zależy od położenia x czyli $F(x)$



$$\Delta W_i = Fi\Delta xi$$

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} F_i \, \Delta x_i$$

Gdy Δx jest bardzo małe i zmierza do 0

$$W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{\infty} F_i \, \Delta x_i$$

$$\Delta x = dx$$

$$dW = Fdx$$

$$W = \int_{x_1}^{x_2} dW = \int_{x_1}^{x_2} Fdx$$

Praca siły niejednostajnie zmiennej

W ogólnym przypadku: $W_{AB} = \int_{A}^{B} \vec{F} \circ d\vec{r}$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow d\vec{r} = \vec{V}dt$$

$$W_{AB} = \int_{A}^{B} \vec{F} \circ \vec{V}dt$$

Moc jest definiowana jako: $P = \frac{dW}{dt}$

$$W_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} Pdt \Rightarrow P = \vec{F} \circ \vec{V}$$

Przykład

Elektrowóz rozwija moc P = 1800 kW i ciągnie po poziomym torze skład wagonów o łącznej masie m = 2000 ton. Współczynnik tarcia kół o szyny wynosi μ = *0,005.* Oblicz:

a) Maksymalną szybkość pociągu;

b) Przyspieszenie pociągu w chwili, gdy porusza się z szybkością V_1= 4 m/s.

Rozwiązanie

a) Warunek osiągnięcia maksymalnej szybkości?

$$P = F \cdot V$$

$$V_{max} = \frac{P}{mg\mu} = 18.3 \left[\frac{m}{s}\right]$$

b) II zas. dyn. Newtona

$$a = \frac{P}{mV_1} - \mu g = 0.17 \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

Energia potencjalna

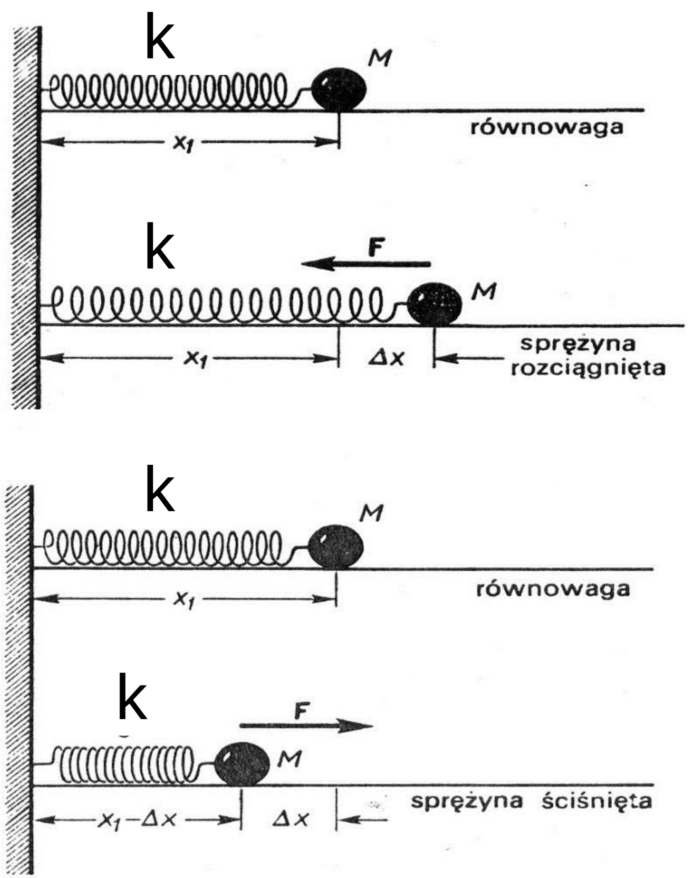
praca wykonana nad ciałem może zmienić nie tylko **energię kinetyczną** lecz również energię **potencjalną ciała**

Podnosząc ciało na pewną wysokość zmieniamy jego energię potencjalną

$$E_p = mgh$$

Jakie są inne niż grawitacyjna, rodzaje energii potencjalnej?

Energia potencjalna sprężystości



Praca siły zależnej od położenia – siły harmonicznej

$$F = -k(x - x_1) \quad \rightarrow \quad \vec{F} = -k\vec{r}$$

$$W = \int dW = \int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{x_1}^{x_2} (-kx) dx$$

$$W = -k \int_{x_1}^{x_2} x dx = -k \left. \frac{x^2}{2} \right|_{x_1}^{x_2}$$

$$W = \frac{k}{2}\left(x_1^2 - x_2^2\right)$$

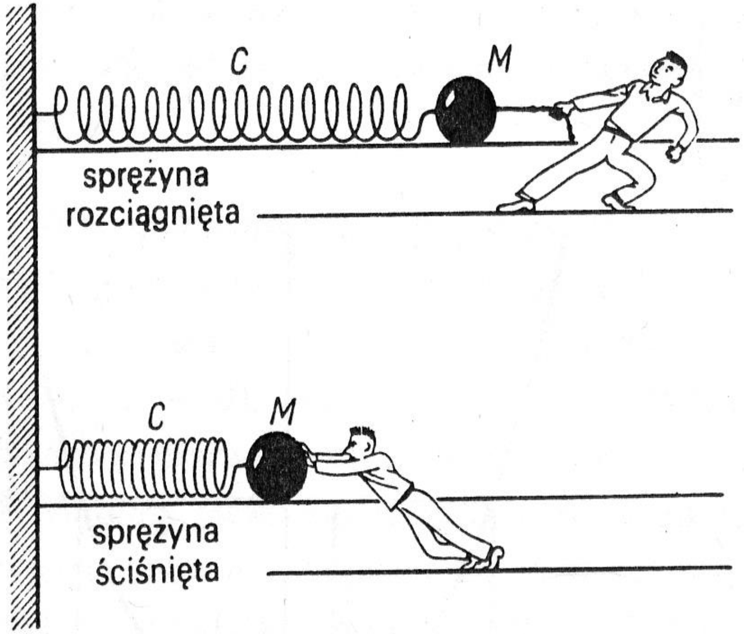
skoro

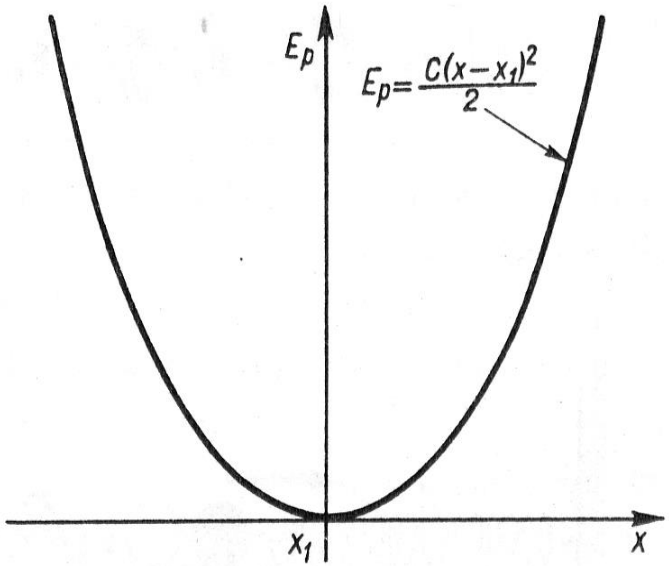
$$W = -\Delta E_p \Rightarrow \quad E_p = \frac{kx^2}{2}$$

Energia potencjalna sprężystości

W – praca wykonana przez siłę sprężystości

Energia potencjalna sprężystości





Rys. 5.13. Aby rozciągnąć (lub ścisnąć) sprężynę, należy wywrzeć siłę o kierunku przeciwnym do kierunku siły sprężystej. Przy przesunięciu sprężyny o wartość Δx z położenia równowagi x_1 należy wykonać pracę

$$W = \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} C(x-x_1)\,dx = \frac{1}{2}C(\Delta x)^2.$$

Rys. 5.14. Wykonując tę pracę zwiększamy energię potencjalną układu masa-sprężyna. Ten układ przesunięty z położenia równowagi o $\Delta x = x-x_1$ ma energię potencjalną $E_p = \frac{1}{2}C(\Delta x)^2 = \frac{1}{2}C(x-x_1)^2$.

Kittel, Mechanika

Energia potencjalna

- Energia potencjalna E_p jest to energia związana z konfiguracją układu ciał, działających na siebie siłami.

- Aby móc wprowadzić pojęcie energii potencjalnej, pole sił musi mieć określoną własność, taką, że praca wykonana w tym polu nie może zależeć od drogi, wzdłuż której zachodzi przemieszczenie

Takie pola i siły nazywamy **zachowawczymi**

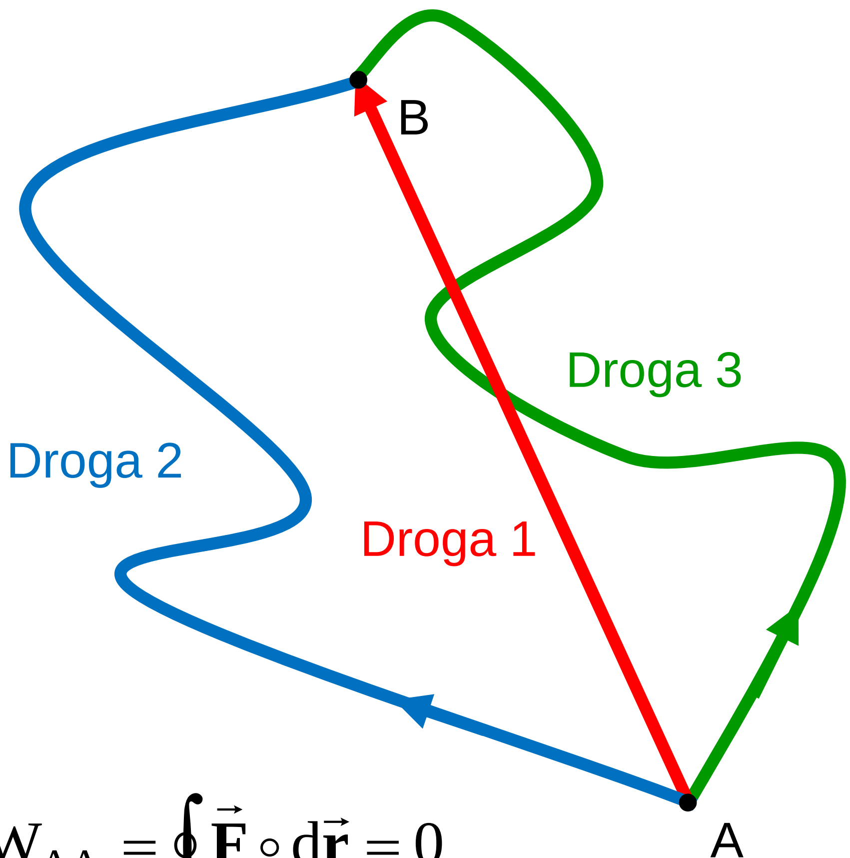
Energia potencjalna

- Energia potencjalna E_p jest to energia związana z konfiguracją układu ciał, działających na siebie siłami.

- Aby móc wprowadzić pojęcie energii potencjalnej, pole sił musi mieć określoną własność, taką, że praca wykonana w tym polu nie może zależeć od drogi, wzdłuż której zachodzi przemieszczenie

Takie pola i siły nazywamy **zachowawczymi**

Siła zachowawcza



Praca wykonana przez <u>siłę zachowawczą</u> nie zależy od drogi lecz zależy jedynie od położeń punktów A i B.

$$W_{AB}^{droga1} = W_{AB}^{droga2} = W_{AB}^{droga3}$$

$$W_{AA} = \oint_L \vec{\mathbf{F}} \circ d\vec{\mathbf{r}} = 0$$

Praca wykonana przez <u>siłę zachowawczą</u> nad cząstką poruszającą się po drodze zamkniętej jest równa zeru

$$W_{AA} = W_{AB} + W_{BA} = 0$$

Przykład 1

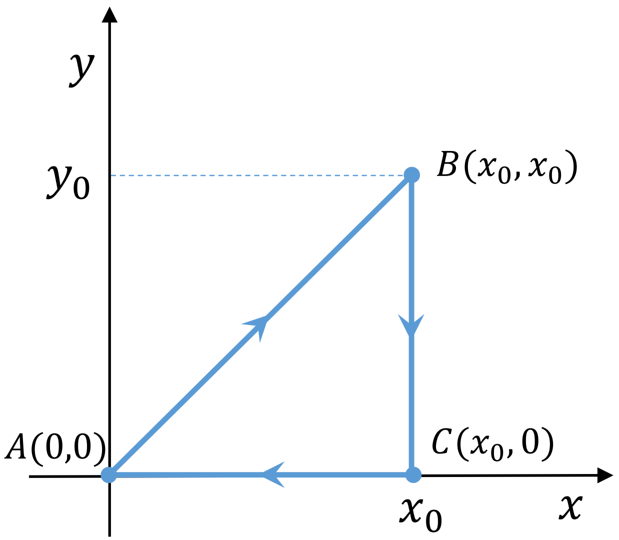
Dane jest pole wektorowe o składowych $F_x = Ky$; $F_y = Kx$; $F_z = 0$; gdzie K jest stałą. Sprawdzić czy to pole jest zachowawcze obliczając pracę po konturze trójkątnym o bokach $y = x$; $y = 0$; $x = x_0$.

$\vec{F} = F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath} + F_z\hat{k}$ wektor siły w układzie kartezjańskim

$\vec{r} = r_x\hat{\imath} + r_y\hat{\jmath} + r_z\hat{k} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$

$d\vec{r} = dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath} + dz\hat{k}$

$\vec{F} = Ky\hat{\imath} + Kx\hat{\jmath} + 0\hat{k}$ wektor siły z zadania



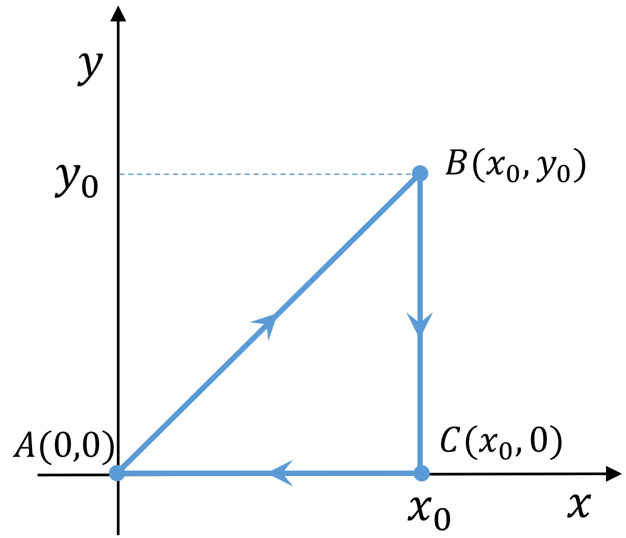
$$\vec{F}\circ d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$$\vec{F}\circ d\vec{r} = Kydx + Kxdy + 0dz = Kydx + Kxdy$$

$$W = \oint \vec{F}\circ d\vec{r} = \int_A^B \vec{F}\circ d\vec{r} + \int_B^C \vec{F}\circ d\vec{r} + \int_C^A \vec{F}\circ d\vec{r} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CA}$$

Przykład 1

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \circ d\vec{r} = \underbrace{\int_0^{x_0} Kydx}_{y=x} + \underbrace{\int_0^{y_0} Kxdy}_{x=y}$$



$$W_{AB} = K\int_0^{x_0} xdx + K\int_0^{y_0} ydy$$

$$W_{AB} = K\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{x_0} + K\frac{y^2}{2}\bigg|_0^{y_0} = K\frac{{x_0}^2}{2} + K\frac{{y_0}^2}{2} = K{x_0}^2$$

$$W_{BC} = \int_B^C \vec{F} \circ d\vec{r} = \int_{x_0}^{x_0} Kydx + \int_{y_0}^{0} Kxdy = K\,yx\bigg|_{x_0}^{x_0} + K\,x_0 y\bigg|_{y_0}^{0} = -Kx_0y_0 = -K{x_0}^2$$

$$W_{CA} = \int_C^A \vec{F} \circ d\vec{r} = \int_{x_0}^{0} K0dx + \int_0^0 Kxdy = 0$$

$$W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CA} = 0$$

Przykład 2

Na cząstkę działa siła **F** = ($3x^2$ N)**i** + (4y N)**j** gdzie x i y są wyrażone w metrach. W wyniku działania siły cząstka przemieszcza się z punktu A(2 m, 3 m) do punktu B(2 m, 0). Zakładamy, że cząstka w punktach A i B spoczywa względem przyjętego układu odniesienia. Jaką pracę wykonuje ta siła nad cząstką? Jaki jest skutek energetyczny wykonanej pracy?

$$W = \int (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

$$F_x = 3x^2$$

$$F_y = 4y$$

$$F_z = 0$$

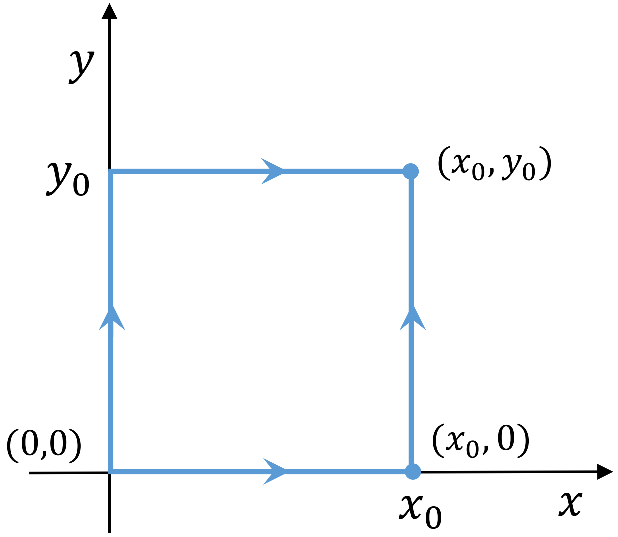
$$W_{AB} = \int_2^2 3x^2 dx + \int_3^0 4y dy$$

$$W_{AB} = 0 + 2y^2 \Big|_3^0 = -18 \; [\mathrm{J}]$$

Zadanie

Pole sił dane jest wzorem: $\mathbf{F} = (y^2 - x^2)\mathbf{i} + (3xy)\mathbf{j}$

Obliczyć całkę krzywoliniową od punktu (0,0) do punktu (x_0,y_0) wzdłuż drogi składającej się dwóch prostych odcinków od (0,0) do $(x_0,0)$ i $(x_0,0)$ do (x_0,y_0). Porównać z wynikiem otrzymanym przy przyjęciu dwóch innych boków prostokąta jako drogi całkowania. Czy siła jest zachowawcza?



Istotne siły rzeczywiste

- Siła ciężkości – siła grawitacji
- Siła oddziaływania elektrostatycznego – siła Coulomba

<u>są siłami zachowawczymi</u>

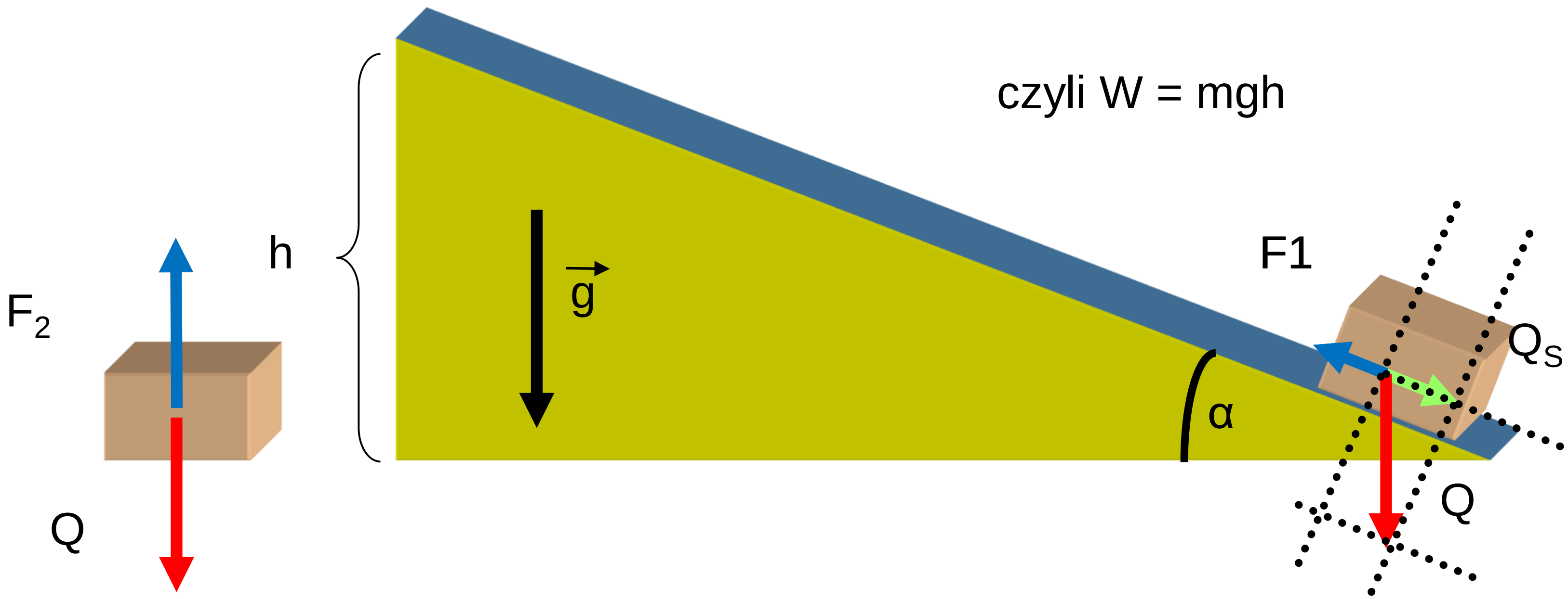
- Przykładem siły niezachowawczej jest siła tarcia

Praca w jednorodnym polu grawitacyjnym

$W = F_1 s = Q_S h / \sin\alpha$

ale $Q_S = Q \sin\alpha$ i $Q = mg$

czyli $W = mgh$

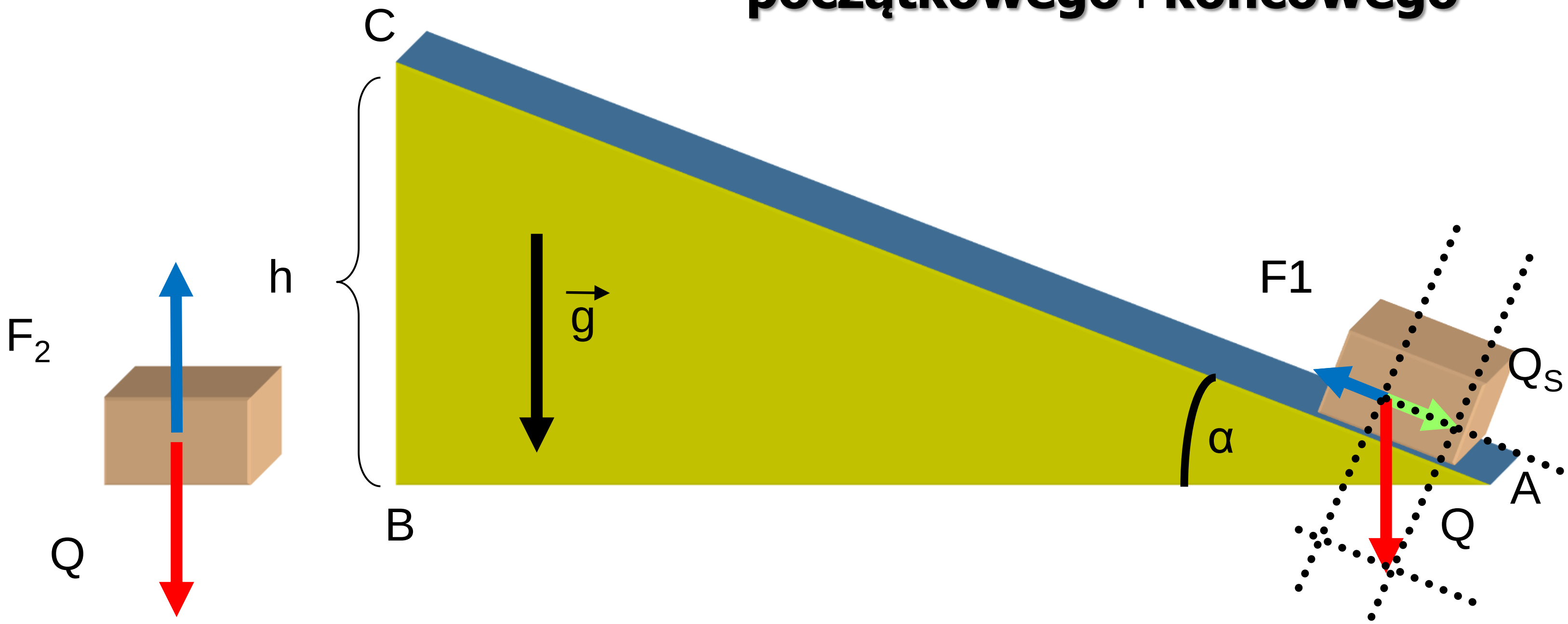


praca siły zewnętrznej $W = \Delta E_p$ zmiana energii potencjalnej

Jednorodne pole grawitacyjne

Jednorodne pole grawitacyjne jest **zachowawcze**

Praca siły zewnętrznej równoważącej siłę ciężkości nie zależy od sposobu przemieszczania ciała lecz od położeń punktów **początkowego** i **końcowego**



$$W_{AC} = \underbrace{W_{AB}}_{0} + W_{BC} = \Delta Ep$$

Siła centralna – siła zachowawcza

Siła centralna jest **siłą zachowawczą**

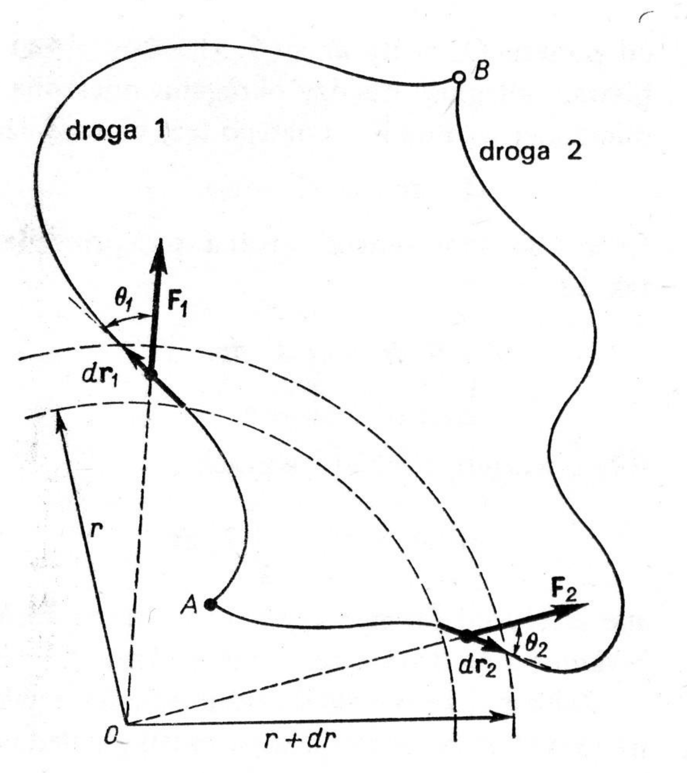
Siła centralna $\vec{\mathbf{F}} = f(r)\hat{\mathbf{r}}$

Przykłady sił centralnych:

siła grawitacji $\vec{\mathbf{F}}(\mathrm{r}) = \mathrm{G}\dfrac{\mathrm{Mm}}{\mathrm{r}^2}\hat{\mathbf{r}}$

siła Coulomba $\vec{\mathbf{F}}(\mathrm{r}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\mathrm{Qq}}{\mathrm{r}^2}\hat{\mathbf{r}}$

siła sprężystości $\vec{\mathbf{F}}(\mathrm{r}) = -\mathrm{kr}\hat{\mathbf{r}}$



Jak obliczać energię potencjalną?

Różnica energii potencjalnej cząstki w punktach A i B jest równa pracy wykonanej przez siłę przyłożoną do cząstki przy jej przesunięciu od A do B

$$E_p(B) - E_p(A) = W(A \to B)$$

Wartośc energii potencjalnej w punkcie **r** jest określona z dokładnością do stałej $E_p(A)$, którą można obrać umownie. Sens fizyczny ma jedynie różnica energii potencjalnej pomiędzy dwoma punktami.

$$E_p(\vec{\mathbf{r}}) = E_p(A) - \int_A^r \vec{\mathbf{F}} \circ d\vec{\mathbf{r}}$$

siła oddziaływania (siła pola)

Umowa: A leży w nieskończoności czyli $E_p(\infty)=0$

$$E_p(\vec{\mathbf{r}}) = -\int_\infty^r \vec{\mathbf{F}} \circ d\vec{\mathbf{r}}$$

Siła zachowawcza a energia potencjalna

Siła zachowawcza	Energia potencjalna	Układ:
$\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{g}}$	$E_p(x) = mgx$	masa m - Ziemia
$\vec{\mathbf{F}}(r) = G\dfrac{Mm}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$	$E_p(r) = -G\dfrac{Mm}{r}$	masa m – masa M
$\vec{\mathbf{F}}(r) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Qq}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$	$E_p(r) = \pm\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Qq}{r}$	ładunek q – ładunek Q
$\vec{\mathbf{F}}(r) = -kr\hat{\mathbf{r}}$	$E_p(r) = \dfrac{1}{2}kr^2$	masa m – sprężyna k

Związek pomiędzy siłą a energią potencjalną

Przypadek jednowymiarowy

$$E_p(x) = -\int_{\infty}^{x} F_x dx$$

$$F_x = -\frac{dE_p}{dx}$$

Przypadek trójwymiarowy

$$E_p(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{r} \vec{F} \circ d\vec{r}$$

$$\vec{F} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\hat{\imath} - \frac{\partial E_p}{\partial y}\hat{\jmath} - \frac{\partial E_p}{\partial z}\hat{k}$$

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad} E_p = -\vec{\nabla} E_p$$

Operator „nabla”: $\vec{\nabla} = -\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} - \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} - \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$

Przykład – siła sprężystości

Energia potencjalna układu masa-sprężyna dana jest wzorem:

$$E_p(r) = \frac{1}{2}kr^2$$

Sprawdzić, stosując wzór: $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p$

czy siła oddziaływania sprowadza się do postaci: $\vec{F}(r) = -k\vec{r}$

$$E_p(r) = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2) \qquad \vec{F} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\hat{\imath} - \frac{\partial E_p}{\partial y}\hat{\jmath} - \frac{\partial E_p}{\partial z}\hat{k}$$

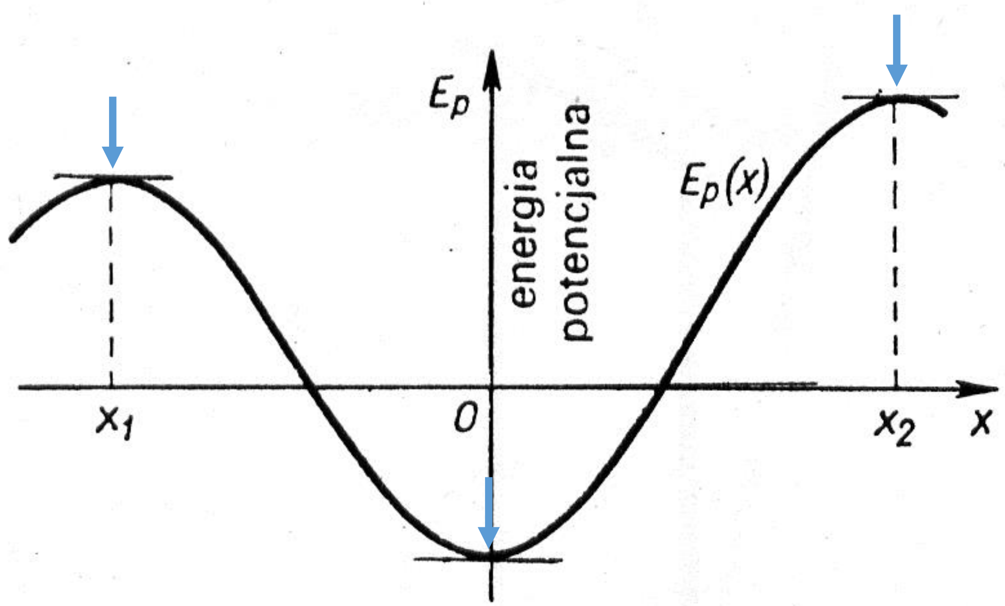
$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}E_p(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2) = kx \\
\frac{\partial}{\partial y}E_p(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2) = ky \\
\frac{\partial}{\partial z}E_p(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2) = kz
\end{aligned}\right\} \quad \overrightarrow{grad}E_p = kx\hat{\imath} + ky\hat{\jmath} + kz\hat{k}$$

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p = -k(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}) = -k\vec{r}$$

Położenie równowagi

Warunek równowagi:

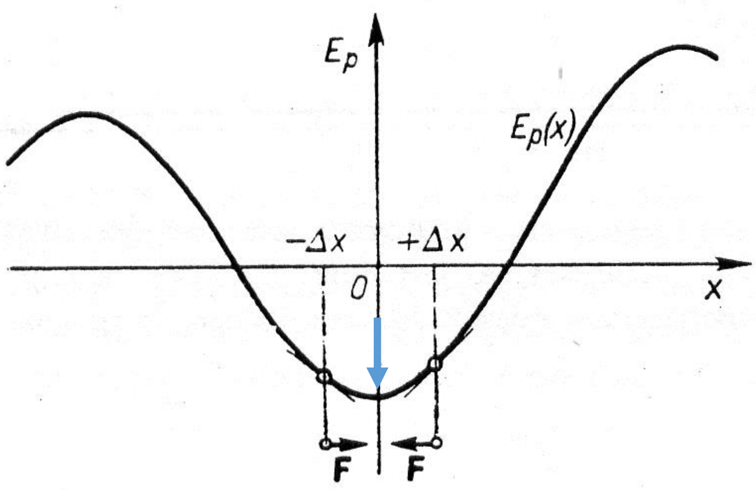
$$F = 0 \Rightarrow \frac{dE_p}{dx} = 0$$

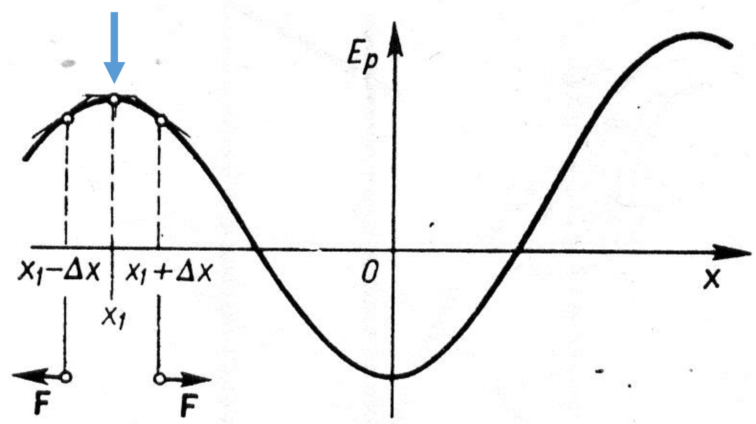


Położenie równowagi

Równowaga trwała, energia potencjalna E_p wykazuje minimum

Równowaga nietrwała, E_p wykazuje maksimum



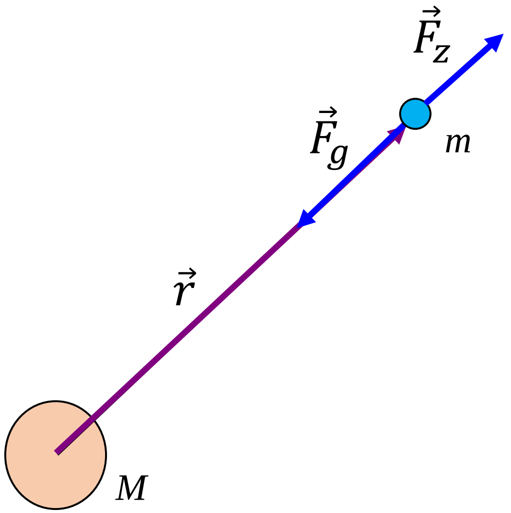


Równowaga obojętna, energia potencjalna E_p jest stała, niezależna od położenia

Wielkości charakteryzujące pole grawitacyjne

- Siła grawitacji $\vec{F}_g = -G\dfrac{M \cdot m}{r^2}\hat{r}$

- Natężenie pola $\vec{g} = \dfrac{\vec{F}_g}{m} = -G\dfrac{M}{r^2}\hat{r}$



- Energia potencjalna

Obliczmy pracę wykonaną przez siłę zewnętrzną przy przesunięciu ciała z $r \rightarrow \infty$:

Aby nie zmieniać energii kinetycznej, ciało jest przesuwane przez siłę zewnętrzną Fz skierowaną przeciwnie do siły grawitacji i co do wartości $F_z = F_g$

Energia potencjalna w polu grawitacyjnym

$$W_z = \int_r^{\infty} \vec{F}_z \circ d\vec{r} = GMm \int_r^{\infty} \frac{1}{r^2} dr = -\frac{GMm}{r}\bigg|_r^{\infty} = -\frac{GMm}{\infty} + \frac{GMm}{r} = \frac{GMm}{r}$$

zatem: $W_z = \dfrac{GMm}{r} = \Delta E_p$ $\quad\quad$ $\Delta E_p = \Delta E_{p\infty} - \Delta E_{pr} = W_z = 0 - \Delta E_{pr}$

$$E_p \stackrel{df}{=} W_{g(\infty \to r)} = W_{z(r \to \infty)} \longrightarrow \boxed{E_{pr} = -\frac{GMm}{r}}$$

skoro $W_g = \displaystyle\int_{\infty}^{r} \vec{F}_g \circ d\vec{r} = -E_p \longrightarrow F_g = -\dfrac{dE_p}{dr}$

Dla przypadku 3D można zapisać: $\vec{F}_g = -\left(\dfrac{\partial E_p}{\partial x}\hat{\imath} + \dfrac{\partial E_p}{\partial y}\hat{\jmath} + \dfrac{\partial E_p}{\partial z}\hat{k}\right)$

$$\overrightarrow{F_g} = -\vec{\nabla} E_p$$

gdzie: $\vec{\nabla} = \dfrac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \dfrac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \dfrac{\partial}{\partial z}\hat{k}$ $\quad\quad$ $\boxed{\overrightarrow{F_g} = -\overrightarrow{grad} E_p}$

Potencjał grawitacyjny

$$V \overset{df}{=} \frac{E_p}{m} \rightarrow E_p = mV$$

$$\overrightarrow{F_g} = -\vec{\nabla} E_p$$

$$-\vec{\nabla} E_p = \overrightarrow{F_g}$$

$$-\vec{\nabla} mV = m\vec{g}$$

$$-\vec{\nabla} V = \vec{g}$$

$$\boxed{\vec{g} = -\overrightarrow{grad} V}$$

$$\boxed{\overrightarrow{F_g} = -\overrightarrow{grad} E_p}$$

natężenie i potencjał   siła i energia potencjalna

Przykład.

Dane jest pole wektorowe o składowych $F_x = Ky$; $F_y = Kx$; $F_z = 0$; gdzie K jest stałą. Pole działa na masę m. Sprawdzono, że pole jest zachowawcze. zachowawcze. Czy istnieje potencjał tego pola V(x,y)? Jeśli tak, to ile on wynosi?

Potencjał grawitacyjny

Rozwiązanie:

$$\overrightarrow{F_g} = -\vec{\nabla}E_p = m\vec{\nabla}V \qquad \vec{F} = F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath} + F_z\hat{k} \qquad \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

$$\vec{F} = F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath} + F_z\hat{k} = -m\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{F_x}{m}; \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{F_y}{m}$$

$$V = -\frac{1}{m}\int_0^x F_x dx = -\frac{1}{m}\int_0^x Kydx = -\frac{1}{m}Kxy$$

$$V = -\frac{1}{m}\int_0^y F_y dy = -\frac{1}{m}\int_0^y Kxdy = -\frac{1}{m}Kxy$$

$$V = -\frac{Kxy}{m}$$

Zasada zachowania energii

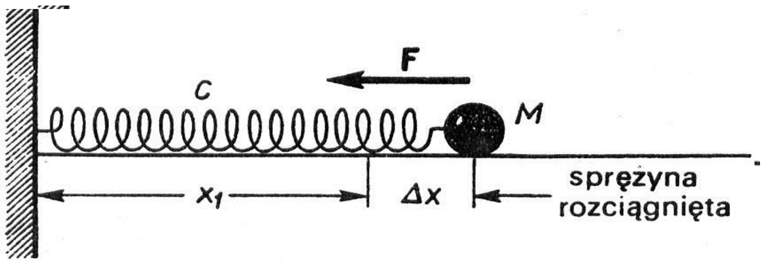
W układzie izolowanym, w którym zmiany energii pochodzą jedynie od sił zachowawczych energia kinetyczna i potencjalna mogą się zmieniać, lecz ich suma czyli energia mechaniczna E_{mech} nie może ulegać zmianie.

$$0 = \Delta E_k + \Delta E_p \quad \rightarrow \quad 0 = E_{k2} - E_{k1} + E_{p2} - E_{p1}$$

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2} \quad \Rightarrow \quad E_k + E_p = \text{const}$$

$$\frac{d}{dt}(E_k + E_p) = 0$$

ZZE – oscylator harmoniczny



$$E_k = m\frac{v^2}{2} \qquad E_p = k\frac{x^2}{2}$$

$$\frac{d}{dt}(E_k + E_p) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{v^2}{2} + k\frac{x^2}{2}\right) = 0$$

$$\frac{m}{2}2v\frac{dv}{dt} + \frac{k}{2}2x\frac{dx}{dt} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

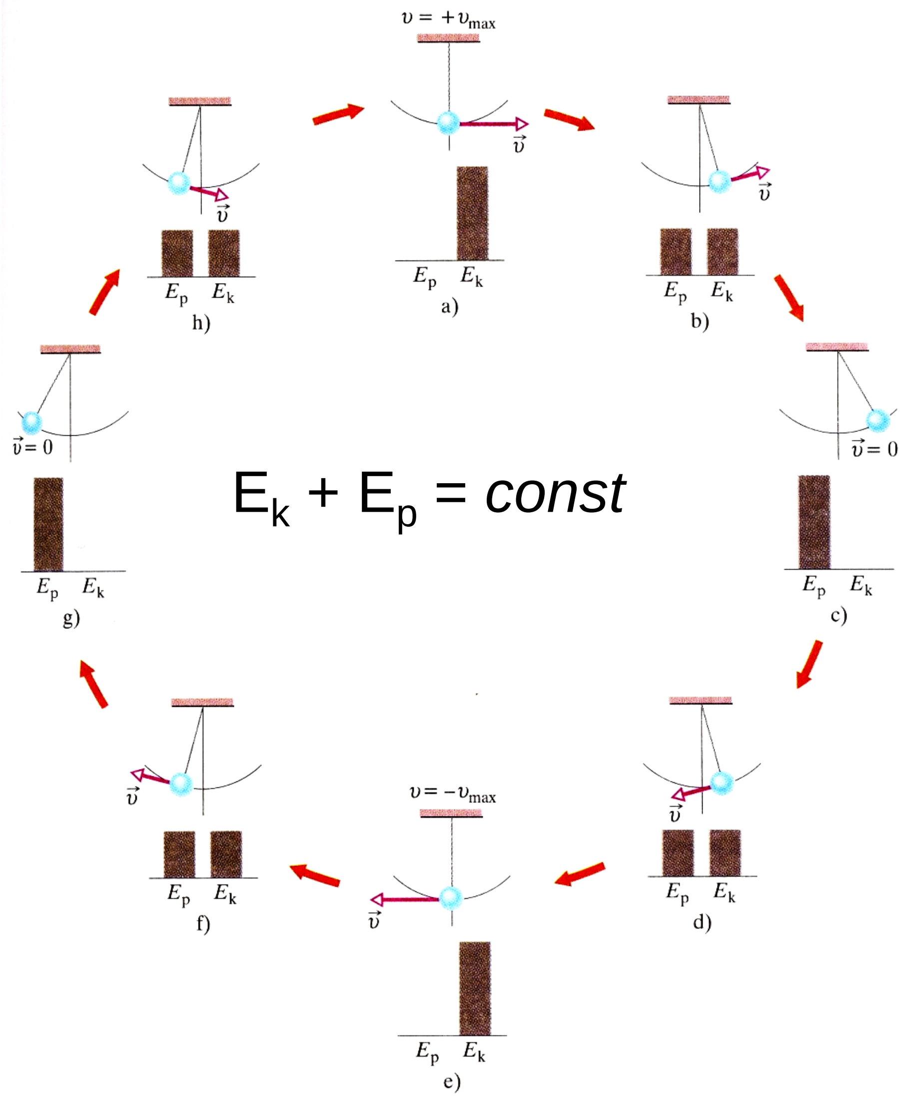
równanie oscylatora harmonicznego

ZZE – oscylator harmoniczny

Zmiany energii w układzie:

wahadło-Ziemia

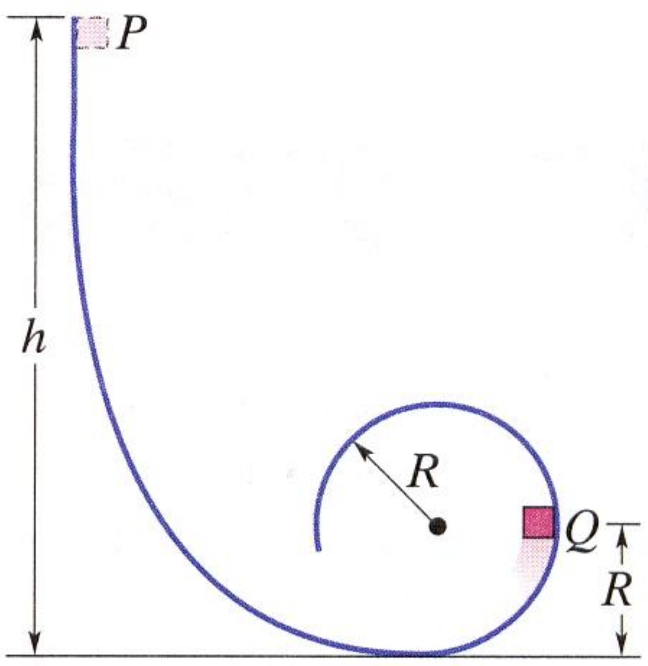
$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}$$



$E_k + E_p = const$

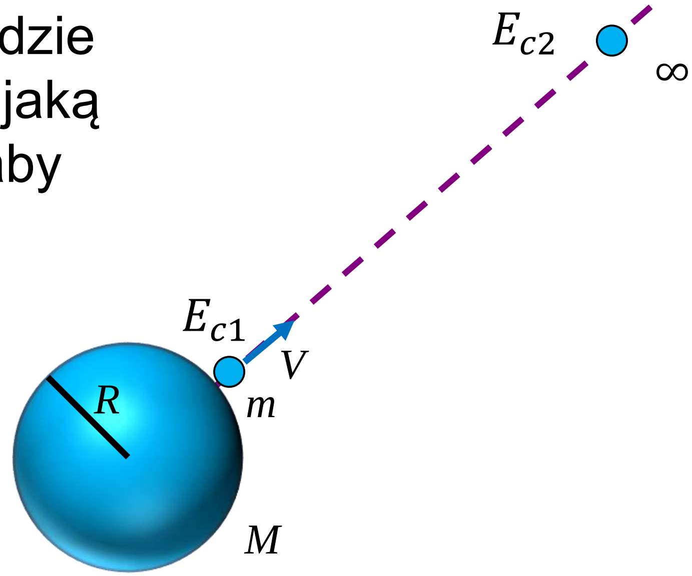
Zadanie

Z jakiej najmniejszej wysokości h musi zjechać klocek aby nie oderwał się od toru w najwyższym punkcie pętli kołowej?



ZZE – pole grawitacyjne

Ciało wyrzucone z powierzchni planety będzie poruszało się w jej polu grawitacyjnym. Z jaką minimalną prędkością trzeba je wyrzucić aby oddaliło się do nieskończoności?



Zgodnie z ZZE

$$E_{c1} = E_{c2}$$

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}$$

$$\frac{mV^2}{2} + \left(-\frac{GMm}{R}\right) = \frac{mV_\infty^2}{2} + \left(-\frac{GMm}{\infty}\right)$$

$$\frac{mV^2}{2} + \left(-\frac{GMm}{R}\right) = 0 + 0$$

$$\frac{mV^2}{2} = \frac{GMm}{R} \qquad V^2 = \frac{2GM}{R} \qquad V = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Wzór na drugą prędkość kosmiczną

$$V_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Dla Ziemi: $V_{II} = 11.19\,\frac{km}{s}$

Związek między pracą a energią mechaniczną

$$W = \Delta E_k + \Delta E_p$$

Praca siły zewnętrznej

Zmiana energii kinetycznej

Zmiana energii potencjalnej

Praca siły zewnętrznej wykonanej nad układem prowadzi do zmiany energii mechanicznej $\mathbf{W = \Delta E_{mech} = \Delta E_k + \Delta E_p}$

Podsumowanie

- Istnieje ścisły związek pomiędzy pracą a energią
- O energii potencjalnej układu można mówić tylko dla sił zachowawczych
- Zasada zachowania energii mechanicznej pozwala rozwiązywać zagadnienia, które są trudne lub niemożliwe do rozwiązania na gruncie zasad dynamiki
- Całkowita energia jest wielkością stałą. Energia może być przekształcana z jednej formy w inną, ale nie może być wytwarzana ani niszczona

$$\boxed{W = \Delta E_{mech} + \Delta E_{term} + \Delta E_{wew}}$$

Przykład

Wahadło balistyczne

Pocisk wystrzelony z szybkością V_0 wbija się w masywną tarczę zawieszoną na linie o długości L.
Masa tarczy jest n–razy większa od masy pocisku.
Lina z zawieszoną tarczą po trafieniu przez pocisk odchyla się o kąt α.
Obliczyć początkową szybkość pocisku.